Teoria Miary i Całki

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 5

Twierdzenie o przedłużeniu miary (półpierścienie, miara zewnętrzna, zbiory mierzalne)

Def. **Pre-miarą** nazywamy funkcję $\mu : \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ określoną na rodzinie $\mathcal{G} \subseteq 2^X$ zawierającej zbiór pusty, taką, że $\mu(\emptyset) = 0$ oraz

$$\left(\begin{array}{c} \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{G} \\ \text{parami rozłączne} \\ \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G} \end{array} \right) \Longrightarrow \mu(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad (\sigma\text{-}\textbf{addytywność})$$

Uw. Pre-miara $\mu : \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ jest miarą $\iff$ $\mathcal{G}$ jest σ-algebrą.

Problem: Kiedy pre-miara $\mu : \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ przedłuża się do miary $\widetilde{\mu} : \sigma(\mathcal{G}) \to [0, +\infty]$?

Caratheodory

Prz. Niech $\mathcal{G} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$, $X = \{a, b\}$ oraz $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\{a\}) = 2$, $\mu(\{a, b\}) = 1$. Wtedy

μ jest pre-miarą, ale nie przedłuża się do miary na $\sigma(\mathcal{G})$!

Zauważmy, że $\mathcal{G}$ jest zamknięta na przekroje, ale nie na różnice.

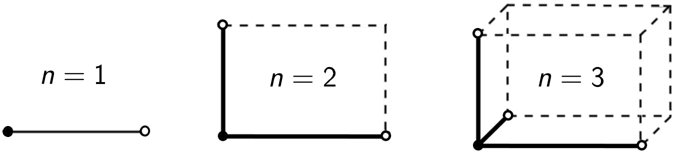
Def. Niepustą rodzinę $\mathcal{S} \subseteq 2^X$ nazywamy **półpierścieniem** jeśli

- (S1) $A, B \in \mathcal{S} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$ *(zamknięta na przekroje)*
- (S2) $A, B \in \mathcal{S} \Longrightarrow \exists_{\substack{\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{S} \\ \text{parami rozłączne}}} A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ *(z dokładnością do rozłącznych sum zamknięta na różnice)*

Uw. Z (S2) i niepustości $\mathcal{S}$ wynika, że $\mathcal{S}$ zawiera $\emptyset$. (bo $A \setminus A = \emptyset$)

Prostopadłościany półotwarte w $\mathbb{R}^n$ tworzą półpierścień!

$$\mathcal{P} := \{[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n) : a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$$



Twierdzenie Caratheodory'ego o przedłużeniu miary

Każda pre-miara $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ na półpierścieniu $\mathcal{S}$ przedłuża się do miary $\tilde{\mu} : \sigma(\mathcal{S}) \to [0, +\infty]$ na σ-algebrze generowanej przez $\mathcal{S}$.

Krok 1. Pre-miara łatwo przedłuża się z półpierścienia na pierścień:

Def. Niepustą rodzinę $\mathcal{R} \subseteq 2^X$ nazywamy **pierścieniem** jeśli

- (R1) $A, B \in \mathcal{R} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$ (*zamknięta na sumy*)
- (R2) $A, B \in \mathcal{R} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$ (*zamknięta na różnice*)

Uw. Z (R2) oraz $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ wynika, że $\mathcal{R}$ jest zamknięty na przekroje. W szczególności pierścień jest półpierścieniem i zawiera $\emptyset$.

Stw. Jeśli $\mathcal{S}$ jest półpierścieniem, to rodzina

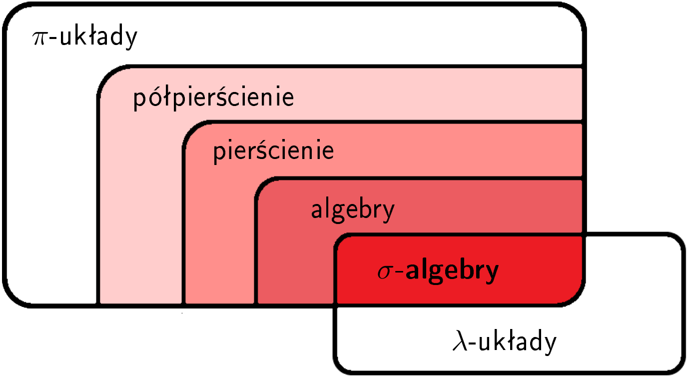
$$\mathcal{R}(\mathcal{S}) := \{\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i : \{A_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{S}, n \in \mathbb{N}\} \qquad \left(\begin{array}{c}\textit{skończone sumy} \\ \textit{parami rozłącznych} \\ \textit{zbiorów z } \mathcal{S}\end{array}\right)$$

jest najmniejszym pierścieniem zawierającym $\mathcal{S}$. Każda pre-miara μ na $\mathcal{S}$ przedłuża się jednoznacznie do pre-miary $\widetilde{\mu}$ na pierścieniu $\mathcal{R}(\mathcal{S})$:

$$\widetilde{\mu}(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i), \qquad \{A_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{S} \text{ parami rozłączne.}$$

Dowód: Patrz np. "pandemiczne notatki z wykładu".

Różne rodziny zbiorów



Uw. $\mathcal{R}$ - pierścień zbiorów $\equiv (\mathcal{R}, \oplus, \odot)$ pierścień algebraiczny, gdzie

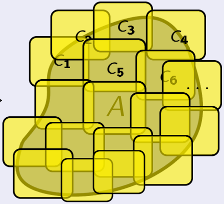
$$A \oplus B := \underbrace{A \setminus B \sqcup B \setminus A}_{\text{różnica symetryczna}}, \qquad A \odot B := A \cap B.$$

Uw. $\mathcal{A}$ - algebra zbiorów $\equiv (\mathcal{A}, \vee, \wedge, \neg)$ algebra Boole'a, gdzie

$$A \vee B := A \cup B, \qquad A \wedge B := A \cap B, \qquad \neg A := X \setminus A.$$

Krok 2. Do ogólnej konstrukcji użyjemy **miary zewntęrznej**.

Lem. Dla dowolnej funkcji $\mu : \mathcal{G} \to [0, +\infty]$ takiej, że $\mu(\emptyset) = 0$, $\emptyset \in \mathcal{G}$, zdefiniujmy funkcję $\mu^* : 2^X \to [0, +\infty]$ wzorem



$$\mu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \{C_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{G} \right\}$$

$= \infty$ jeśli nie istnieje pokrycie A zbiorami z $\mathcal{G}$

Wtedy

- **Z1** $\mu^*(\emptyset) = 0$ *(niezdegenerowanie)*
- **Z2** $A \subseteq B \Longrightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$ *(monotoniczność)*
- **Z3** $\forall_{\{A_n\}_{n=1}^{\infty}} \; \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ *(σ-subaddytywność)*

Def. Każdą funkcję $\mu^* : 2^X \to [0, +\infty]$ spełniającą (Z1), (Z2), (Z3) nazywamy **miarą zewnętrzną**. (Miara zewnętrzna na ogół nie jest miarą!)

Dowód Lem: (Z1). Kładąc $C_1 = C_2 = C_3 = \ldots = \emptyset \in \mathcal{G}$ otrzymujemy pokrycie $\emptyset$ i stąd $\mu^*(\emptyset) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\emptyset) = 0 \Longrightarrow \mu^*(\emptyset) = 0$.

(Z2). Jeśli $A \subseteq B$, to każde pokrycie zbioru B jest także pokryciem zbioru A. Czyli potencjalnie A ma więcej pokryć zbiorami z $\mathcal{G}$. Stąd

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \{C_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{G}\}$$
$$\leqslant \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) : B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \{C_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{G}\} = \mu^*(B).$$

(Z3). Nierówność $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ jest oczywista, jeśli $\mu^*(A_n) = \infty$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Załóżmy więc, że $\mu^*(A_n) < \infty$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ istnieją $\{C_k^n\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{G}$ takie, że $A_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k^n$ i $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k^n) < \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Wtedy ciąg $\{C_k^n\}_{k=1,n=1}^{\infty,\infty} \subseteq \mathcal{G}$ jest pokryciem zbioru $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ i stąd

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k^n) < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

Z dowolności $\varepsilon > 0$ dostajemy $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$. $\blacksquare$

Tw. Dla dowolnej miary zewnętrznej μ^* rodzina zbiorów

$$\mathcal{F}_{\mu^*} := \{A \subseteq X : \underbrace{\forall_{B \subseteq X} \ \ \mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A')}_{\text{Warunek Caratheodory'ego } (C)}\}$$

jest σ-algebrą i $\mu^* : \mathcal{F}_{\mu^*} \to [0, +\infty]$ jest miarą ($\mu^*|_{\mathcal{F}_{\mu^*}}$ jest σ-addytywna).

Uw. Na mocy subaddytywności miary zewnętrznej:

A spełnia warunek $(C) \iff \forall_{B \subseteq X} \ \ \mu^*(B) \geqslant \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A')$

Dowód: $(\Sigma 1)$. $X \in \mathcal{F}_{\mu^*}$ bo dla dowolnego $B \subseteq X$ mamy

$$\mu^*(B \cap X) + \mu^*(B \cap X') = \mu^*(B) + \mu^*(\emptyset) = \mu^*(B).$$

$(\Sigma 2)$.
$$\begin{aligned} A \in \mathcal{F}_{\mu^*} &\iff \forall_{B \subseteq X} \ \ \mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A') \\ &\iff \forall_{B \subseteq X} \ \ \mu^*(B) = \mu^*(B \cap A') + \mu^*(B \cap (A')') \\ &\iff A' \in \mathcal{F}_{\mu^*}. \end{aligned}$$

Zamiast $(\Sigma 3)$ pokażemy, że $\mathcal{F}_{\mu^*}$ jest algebrą oraz λ-układem (czyli w sumie σ-algebrą). Przy okazji pokażemy σ-addytywność $\mu^*|_{\mathcal{F}_{\mu^*}}$.

Niech $A_1, A_2 \in \mathcal{F}_{\mu^*}$ i $B \subseteq X$. Wtedy

$$\mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(B \cap (A_1 \cup A_2)') \leqslant^{\substack{A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2) \sqcup (A_1 \cap A_2') \sqcup (A_1' \cap A_2) \\ + \text{ podaddytywność } \mu^* \text{ + De Morgan}}}$$

$$\leqslant \underbrace{\mu^*(B \cap A_1 \cap A_2) + \mu^*(B \cap A_1 \cap A_2')}_{\text{warunek } (C) \text{ dla } A_2 \text{ i } B \cap A_1} + \underbrace{\mu^*(B \cap A_1' \cap A_2) + \mu^*(B \cap A_1' \cap A_2')}_{\text{warunek } (C) \text{ dla } A_2 \text{ i } B \cap A_1'}$$

$$= \underbrace{\mu^*(B \cap A_1) + \mu^*(B \cap A_1')}_{\text{warunek } (C) \text{ dla } A_1 \text{ i } B} = \mu^*(B)$$

Zatem $A_1 \cup A_2$ spełnia (C). Czyli $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}_{\mu^*}$. Skoro $\mathcal{F}_{\mu^*}$ zamknięta na sumy i dopełnienia to i na różnice, bo $A \setminus B = (A' \cup B)'$.
Zatem $\mathcal{F}_{\mu^*}$ jest algebrą (a w szczególności π-układem).

Niech teraz $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}_{\mu^*}$ parami rozłączne. Dla $B \subseteq X$ i $N \in \mathbb{N}$

$$\mu^*(B \cap \bigsqcup_{n=1}^{N} A_n) \overset{(C) \text{ dla } A_N}{=\!=\!=} \mu^*(B \cap \bigsqcup_{n=1}^{N} A_n \cap A_N) + \mu^*(B \cap \bigsqcup_{n=1}^{N} A_n \cap A_N')$$

$$= \mu^*(B \cap A_N) + \mu^*(B \cap \bigsqcup_{n=1}^{N-1} A_n)$$

Powtarzając to rozumowanie otrzymamy

$$\mu^*\Big(B \cap \bigsqcup_{n=1}^{N} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{N} \mu^*(B \cap A_n) \qquad (\heartsuit)$$

Następnie skoro $\bigsqcup_{n=1}^{N} A_n \in \mathcal{F}_{\mu^*}$ (bo $\mathcal{F}_{\mu^*}$ algebra), to

$$\mu^*(B) \overset{(C)\text{ dla } \bigsqcup_{n=1}^{N} A_n}{=\!=\!=\!=} \mu^*\Big(B \cap \bigsqcup_{n=1}^{N} A_n\Big) + \mu^*\Big(B \cap \big(\bigsqcup_{n=1}^{N} A_n\big)'\Big)$$

$$\overset{(\heartsuit)}{=\!=} \sum_{n=1}^{N} \mu^*(B \cap A_n) + \mu^*\Big(B \cap \big(\bigsqcup_{n=1}^{N} A_n\big)'\Big) \geqslant \begin{array}{c}\text{monotoniczność}\\ \text{miary zew. } \mu^*\end{array}$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{N} \mu^*(B \cap A_n) + \mu^*\Big(B \cap \big(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\big)'\Big).$$

Przechodząc z $N \to \infty$ otrzymujemy

$$\mu^*(B) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B \cap A_n) + \mu^*\Big(B \cap \big(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\big)'\Big) \geqslant \begin{array}{c}\sigma\text{-subaddytywność}\\ \text{miary zewnęt. } \mu^*\end{array}$$

$$\geqslant \mu^*\Big(B \cap \big(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\big)\Big) + \mu^*\Big(B \cap \big(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\big)'\Big).$$

Zatem $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_{\mu^*}$, bo spełnia (C). Ponadto, kładąc tu $B = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ dostaniemy $\mu^*\big(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$. Czyli $\mu^*|_{\mathcal{F}_{\mu^*}}$ jest miarą. ∎

Krok 3. „Połączyć kropki”.

Niech $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ pre-miara na półpierścieniu $\mathcal{S}$ i

$$\mu^*(A) := \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n, \{C_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{S}\}$$

Lem1. μ^* na $\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \{\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i : \{A_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{S}, n \in \mathbb{N}\}$ pokrywa się z pre-miarą $\widetilde{\mu}(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$ ze **Stw**.

Dowód: Niech $A \in \mathcal{R}(\mathcal{S})$. Jasne jest, że $\mu^*(A) \leqslant \widetilde{\mu}(A)$, bo jeśli $A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$, gdzie $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{S}$, to $\widetilde{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$ i $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{S}$ pokrycie A. Z drugiej strony, jeśli $\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{S}$ pokrycie A, to

$$\widetilde{\mu}(A) = \widetilde{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \cap A) \overset{\sigma\text{-subaddyt.}}{\leqslant} \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(C_n \cap A) \overset{\text{monoton.}}{\leqslant} \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(C_n).$$

Czyli $\widetilde{\mu}(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n)$, skąd $\widetilde{\mu}(A) \leqslant \mu^*(A)$. ■

Lem2. $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}_{\mu^*}$.

Dowód: Niech $A \in \mathcal{S}$, $B \subseteq X$ i niech $\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{S}$ pokrycie B.

$$\begin{aligned}
\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A') &\overset{\text{monoton.}}{\leqslant} \mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \cap A\Big) + \mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \cap A'\Big) \\
&\overset{\sigma\text{-subaddyt.}}{\leqslant} \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(C_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(C_n \cap A') \\
&\overset{\text{Lem1}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(C_n \cap A) + \widetilde{\mu}(C_n \setminus A) \\
&\overset{\text{add.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\mu}(C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n).
\end{aligned}$$

Z dowolności $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$, mamy $\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A') \leqslant \mu^*(B)$.
Zatem $A \in \mathcal{F}_{\mu^*}$ (spełnia warunek (C)). ■

Wn. Jeśli $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ jest pre-miarą na półpierścieniu $\mathcal{S}$, to $\mu^* : \mathcal{F}_{\mu^*} \to [0, +\infty]$ jest miarą będącą przedłużeniem μ.

Dowód: Tw $\Longrightarrow \mu^*|_{\mathcal{F}_\mu^*}$ miara. **Lem1,2** $\Longrightarrow \mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}_{\mu^*}$ i $\mu^*|_{\mathcal{S}} = \mu$.